

التمرين الأول: (3 ن) (1 و 2) مستقلان

- (1) أ- حل في \mathbb{N}^2 المعادلة: $7x - 4y = 4$ 0.5
 ب- ليكن A عددا صحيحا طبيعيا بحيث $A = \overline{75}$ في نظمة العد ذات الاساس x و $A = \overline{49}$ في نظمة العد ذات الاساس y . حدد القيم الممكنة للعددين x و y . 0.5
 ج- حدد x و y إذا علمت أنه يوجد عدد B بحيث $B = \overline{125}_{(y)}$ و $B = \overline{310}_{(x)}$. 0.5
 د- اكتب A و B في نظمة العد العشري. 0.25
 (2) أ- أعط بكل دقة نص مبرهنة فيرما الصغرى 0.5
 ب- باستعمال مبرهنة فيرما بين أن العدد $n(n^6 - 1)$ يقبل القسمة على 42 مهما يكن n من \mathbb{N} . 0.75

التمرين الثاني: (3.5 ن) (الجزءان 1 و 2) مستقلان

- (1) لكل x و y من \mathbb{R}^+ نضع: $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$
 أ- ادرس تبادلية وتجميعية القانون * 0.5
 ب- بين أن $(\mathbb{R}^+, *)$ يقبل عنصرا محايدا وحدد العناصر التي تقبل مائلا في $(\mathbb{R}^+, *)$? 0.5
 ج- بين أن كل الأعداد الحقيقية الموجبة منتظمة بالنسبة للقانون * 0.75
 (2) نعتبر المجموعة $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$
 أ- بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ 0.5
 ب- بين أن التطبيق φ من \mathbb{R} نحو E والذي يربط كل عدد حقيقي x بالمصفوفة $M(x)$ هو تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) 0.75
 ج- استنتج بنية (E, \times) 0.5

التمرين الثالث: (3.5 ن) (نقط)

- I- نعتبر في \mathbb{C} الحدودية: $P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + (-1+9i)z - 2(1+5i)$
 (1) حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-7-24i$. 0.25
 (2) حل في \mathbb{C} المعادلة: $P(z) = 0$. (يمكنك حساب $P(2)$) 0.75
 II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر A و B و C التي ألقاها على التوالي 2 و $1-i$ و $-2+3i$ وليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\overline{CA}, \overline{CB})$ و r الدوران الذي مركزه C و زاويته θ
 (1) نعتبر المجموعة التالية: $(\Delta) = \left\{ M(z) \in (P) / |2-z| = |\bar{z} - 1 - i| \right\}$
 أ- تحقق أن $C \in (\Delta)$. 0.25
 ب- حدد طبيعة المجموعة (Δ) و استنتج صورة النقطة A بالدوران r . 0.5
 (2) أ- تحقق أن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i \left(\frac{2-i}{2+i} \right)^2$ ثم استنتج أن: $4 \arg(2-i) + \frac{\pi}{2} \equiv \theta [2\pi]$ 0.5
 ب- نضع: $\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. بين أن $\arg(2-i) \equiv -\beta [2\pi]$ 0.5
 ج- استنتج أن: $\theta \equiv \frac{\pi}{2} - 4 \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ 0.25

3) ليكن h التحاكي الذي مركزه C و نسبته 1 .
 باستعمال الصيغة العقدية لكل من h و r ، حدد طبيعة التحويل $r \circ h$ و عناصره المميزة. 0.5

التمرين الرابع: (10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} & ; x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 . 0.5
 2) أعط جدول تغيرات الدالة f (مع تحديد نهايات الدالة f عند D_f). 0.75
 3) ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 أ- بين أن: $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{x (\ln x)^3}$ ($\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$) ثم أدرس تقعر المنحنى (C) . 0.75
 ب- حدد الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$ للمنحنى (C) . 0.25
 ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم الذي معادلته $y = x$. 0.5
 د- أنشئ (C) . 0.75

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 1) أ- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq e$. 0.25
 ب- أدرس رتبة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 0.25
 ج- استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها. 0.5
 2) أ- بين أن: $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$ ($\forall x \geq e$) 0.25
 ب- استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - e| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 0.75
 ج- حدد أصغر عنصر n_0 من \mathbb{N} بحيث تكون u_{n_0} قيمة مقربة للعدد e بالدقة 10^{-20} . 0.25

III- لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بمايلي: $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

- 1) تحقق أن F معرفة على $]1,+\infty[$. 0.25
 2) حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. 0.5
 3) أ- بين أن: $\ln x \leq x - 1$ ($\forall x \in]1,+\infty[$) 0.5
 ب- بين أن: $F(x) \geq 1 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ($\forall x \in]1,+\infty[$) ثم حدد $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$. 1.25
 4) أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$. 0.25
 ب- أدرس تغيرات F على $]e,+\infty[$. 0.25
 5) لكل n من \mathbb{N} بحيث $n \geq 3$. نعتبر المعادلة: $f(x) = F(n)$ (E_n)
 أ- بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[n, n+1]$. 0.5
 ب- أدرس رتبة المتتالية (α_n) . 0.25
 ج- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$. 0.5